Über die thermische Dissoziation des Vakuums

Von Fritz G. Houtermans und J. Hans D. Jensen

Aus den Physikalischen Instituten der Universität Göttingen
und der Technischen Hochschule Hannover

(Z. Naturforschg. **2a**, 146—148 [1947]; eingegangen am 21. November 1947)

Hermann Braune zum 60. Geburtstag gewidmet

Wir möchten in dieser Note auf einige Konsequenzen der Positronentheorie hinweisen, bei denen die Notwendigkeit der Erweiterung der Quantentheorie durch die Einführung einer „kleinsten Länge" besonders augenfällig wird.

Wie in der Literatur schon mehrfach hervorgehoben wurde[1], befinden sich in einem „materiefreien" Hohlraum im thermischen Gleichgewicht immer eine Anzahl Elektron-Positron-Paare. Wenn auch bei „normalen Temperaturen" die Zahl solcher Paare sehr gering ist, so steigt sie doch sehr rasch mit der Temperatur an, und bei kT über 137 mc^2 ($m =$ Elektronenmasse, $c =$ Lichtgeschwindigkeit) würde schon mehr als ein Paar auf das Elementarvolumen $4\pi/3\ (e^2/mc^2)^3$ entfallen, so daß sich bei dieser Temperatur ganz zwangsläufig eine „dichteste Packung" von Elementarteilchen ergeben würde (wegen Lorentz-Kontraktion s. 2.). Temperaturen dieser Größenordnung sind schon mehrfach im Zusammenhang mit kosmologischen Fragen und der Elementen-Häufigkeits-Verteilung diskutiert worden; jedoch scheint uns nach dem eben Gesagten die Behandlung dieses Fragenkomplexes ohne direkte Bezugnahme auf das Problem der Elementarteilchen nicht sinnvoll zu sein.

Als weitere Konsequenz der thermischen Dissoziation besitzt das Vakuum eine temperaturabhängige Polarisierbarkeit, im Unterschied zu den Voraussetzungen[2] der Dirac-Heisenbergschen Positronentheorie, die sich auf den Fall $T = 0$ bezieht. Es ergeben sich also Zusatzglieder zur Heisenberg-Eulerschen[3] Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes, die bereits bei $kT = mc^2$ merklich werden. Eine Coulombsche Ladung, etwa ein Atomkern, umgibt sich mit einer Dipolwolke, die freilich bei normalen Temperaturen äußerst schwach und ausgedehnt ist, aber bei kT über mc^2 das Coulomb-Feld wesentlich modifiziert.

1. Der Dissoziationsgrad

Zunächst bringen wir eine kurze Rekapitulation der aus der Literatur bekannten Formeln für den Dissoziationsgrad. Wir benutzen das Bild der Diracschen Löchertheorie, in dem im thermischen Gleichgewicht immer einige Elektronen aus den Zuständen negativer Energie in positive Energiezustände gehoben sind[4]. Da das Vakuum elektrisch neutral ist, können wir in erster Näherung mit voneinander unabhängigen Elektronen rechnen; erst in nächster Näherung wird durch Polarisationswirkungen (Ladungsschwankungen) der Dissoziationsgrad im Debye-Hückelschen Sinne etwas vergrößert; diese Korrektur ist aber unerheblich (vergl. 2). Wir messen die Energie in Einheiten mc^2, die Impulse in Einheiten mc und schreiben demgemäß: $E = mc^2 \cdot \varepsilon$; $kT = mc^2 \cdot \vartheta$; $P = mc \cdot p$. Dann gilt $\varepsilon^2 = 1 + p^2$. Die Fermi-Statistik liefert für $w(\varepsilon)$, die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Quantenzustands mit der Energie ε, die Beziehung

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{A e^{\varepsilon/\vartheta} + 1}, \tag{1}$$

worin die Konstante A noch aus der Bedingung der elektrischen Neutralität festzulegen ist und,

[1] z. B. Chandrasekhar u. Rosenfeld, Nature [London] **135**, 999 [1935]; Heitler, Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 243 [1935]; Hund, Ergebn. exakt. Naturwiss. **15**, 189 [1936]; Fowler, Statistical Mechanics, 2nd ed., Cambridge 1936, S. 653.

[2] Weisskopf, Kong. Dansk. Vidensk. Selsk., mat.-fysiske Medd. **XIV**, 6 [1936].

[3] Heisenberg u. Euler, Z. Physik **38**, 714 [1936].

[4] Die Ergebnisse sind von diesem speziellen Modell unabhängig, vergl. Fowler[1], wo mit „wirklichen" Positronen gerechnet wird.

wie sich gleich ergeben wird, den Wert $A = 1$ hat. Die Zahl der Quantenzustände pro Volumeinheit im Impulsintervall dp, bei bestimmten Vorzeichen der Energie, möge $z(p)dp$ heißen; die übliche Abzählung liefert:

$$z(p)\,dp = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 p^2\,dp\,. \tag{2}$$

Für die Elektronendichte $n_-(\vartheta)$ und Positronendichte $n_+(\vartheta)$ ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$n_-(\vartheta) = \int_{\varepsilon=1}^{\infty} w(\varepsilon)\,z(p)\,dp$$

$$\text{bzw.}\quad n_+(\vartheta) = \int_{\varepsilon=-1}^{-\infty} \{1 - w(\varepsilon)\}\,z(p)\,dp\,. \tag{3}$$

Beide Ausdrücke werden gleich (Neutralitätsbedingung), wenn in (1) $A = 1$ gesetzt wird. Wir multiplizieren die Dichte $n_-(\vartheta)$ mit $4\pi/3\;(e^2/mc^2)^3$, dem Volumen einer Kugel vom Elektronenradius, und nennen $W(\vartheta)$ die so definierte mittlere Anzahl von Elektron-Positronenpaaren pro Elementarvolumen:

$$W(\vartheta) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)\int_{\varepsilon=1}^{\infty}\frac{p^2\,dp}{e^{\varepsilon/\vartheta}+1}\,. \tag{4}$$

Für kleine bzw. große ϑ-Werte ergeben sich die Approximationsformeln

$$W(\vartheta) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\vartheta}}{137}\right)^3 e^{-1/\vartheta} \quad \text{für } \vartheta \ll 1\,, \tag{4a}$$

$$W(\vartheta) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{137}\right)^3 \quad \text{für } \vartheta \gg 1\,. \tag{4b}$$

Zwischen diesen beiden Grenzfällen läßt sich leicht graphisch interpolieren. Man sieht, daß bei $\vartheta = 137$ die Zahl der Teilchen pro Elementarkugel von der Größenordnung 1 wird.

Freilich erscheint es uns fraglich, ob man bei solchen Temperaturen überhaupt noch vom thermischen Gleichgewicht reden kann, oder ob nicht vielmehr unter diesen Bedingungen dauernd sehr viele Neutrinos entstehen würden, deren Abwandern es unmöglich macht, Temperaturen von dieser Größenordnung aufrechtzuerhalten. Denn bei $kT \sim 137\,mc^2$ ist im Vakuum bereits auch eine merkliche Mesonenproduktion vorhanden, diese würden rasch in Elektronen und Neutrinos zerfallen, und da wir keinen Prozeß kennen, der die Neutrinos in einem endlichen Volumen so lange festhielte, daß sich auch für sie eine Temperaturverteilung einspielen könnte, wäre das „principle of detailed balance" wesentlich verletzt, und außerdem würde das Abwandern der Neutrinos eine fast spontane Energiedissipation zur Folge haben. Noch viel rascher verlaufen diese Prozesse, sobald auch Nucleonen vorhanden sind, deren rascher Wechsel zwischen Protonen- und Neutronenzuständen die starke Neutrinoproduktion mit sich führen würde[5].

2. Ergänzende Bemerkungen

I. *Die Debye-Hückel-Korrektion* bleibt immer gering, wie folgende Abschätzung zeigt. Die Polarisationswirkung geht dahin, daß in der Umgebung jeder positiven Ladung sich ein negativer Ladungsüberschuß befindet, und umgekehrt. Eine obere Grenze für die damit verbundene Energiekorrektur erhalten wir, wenn wir annehmen, daß um jedes Elektron eine Kugel vom Volumen n^{-1} von negativer Ladung frei ist; das liefert einen negativen Energiebeitrag pro Elektron $\Delta E \approx e^2 \cdot n^{1/3}$ (bis auf Zahlfaktoren nahe bei 1), oder in den Einheiten mc^2 wird:

$$\Delta\varepsilon \cong \frac{e^2}{mc^2}\,n^{1/3} \cong W(\vartheta)^{1/3}\,;$$

also ist

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\vartheta} \cong \frac{1}{137}\,\frac{e^{-1/3\,\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}} \quad \text{für } \vartheta \ll 1$$

bzw.

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\vartheta} \cong \frac{1}{137} \quad \text{für } \vartheta \gg 1\,.$$

Die Polarisationsenergie bleibt also immer klein gegenüber der mittleren thermischen Energie, und demgemäß kann der Dissoziationsgrad durch die Polarisationswirkungen nicht merklich geändert werden.

II. *Der endliche Platzbedarf der Elektronen* läßt sich bei schwachen Dissoziationsgraden leicht auf elementare Weise in der Art der van der Waalsschen Volumenkorrektur berücksichtigen. Das Phasenraumvolumen $z(p)dp$ in

[5] Die sogenannten „urca-Prozesse" von Gamow u. Schönberg, Physic. Rev. **59**, 539 [1941].

Gl. (2) wäre in der bekannten Weise mit dem Faktor $\{1 - 8v_0 \cdot n(\vartheta)\}$ zu multiplizieren, wenn v_0 das Eigenvolumen des Elektrons bedeutet, wofür wir etwa $4\pi/3\ (e^2/mc^2)^3$ setzen könnten, und $n(\vartheta)$ erst nachträglich zu bestimmen ist. Wenn wir den Wert für $W(\vartheta)$ des vorigen Paragraphen mit $W_0(\vartheta)$ bezeichnen, so liefert eine elementare Rechnung

$$W(\vartheta) = \frac{W_0(\vartheta)}{1 + 8\ W_0(\vartheta)}\,. \tag{5}$$

Diese Gleichung würde für sehr große ϑ immer noch einen vernünftigen Verlauf der Elektronendichte ergeben; daß sie jedoch den Zustand in diesem Temperaturgebiet wirklich einigermaßen richtig darstellte, wäre ein noch größerer Zufall als die approximative Gültigkeit der van-der-Waals-Gleichung im Gebiet hoher Dichten. Denn die angedeutete Herleitung von (5) ist an die Voraussetzung $\vartheta < 1$ gebunden aus einer Reihe von Gründen:

a) Die angegebene Änderung des Phasenvolumens ist nur so lange eine konsequente Näherung, als das gesamte Eigenvolumen klein gegenüber dem verfügbaren Volumen ist, d. h. für $W(\vartheta) \ll 1$.

b) Der Ansatz eines festen Eigenvolumens ist nur im nichtrelativistischen Bereich vernünftig; für $\vartheta > 1$ haben aber die meisten Elektronen nahezu Lichtgeschwindigkeit, und ihre gegenseitige Raumbehinderung müßte in relativistisch invarianter Weise eingeführt werden. Die Lorentz-Kontraktion beseitigt das Paradoxon jedoch nicht vollständig; denn weil durch die Kontraktion das Volumen nur in der Bewegungsrichtung verkleinert wird, so würde der Platzbedarf sich etwa um einen Faktor $1/\vartheta$ reduzieren, während nach (4b) die Dichte proportional zu ϑ^3 anstiege.

c) Der endliche Raumbedarf bewirkt neben der van-der-Waals-Korrektion auch eine Änderung des Energiespektrums im Impulsraum[6], die bei hohen Dichten sehr erheblich wird. Wir möchten deshalb schließen, daß eine Diskussion von Temperaturen, die merklich größer als $kT = mc^2$ sind, nicht sinnvoll ist ohne Bezugnahme auf die sogenannte „zukünftige Theorie der Elementarteilchen".

Während (4b) für die Energiedichte des dissozienten Vakuums neben der Strahlungsenergie $kT \gg mc^2$ ein ebenfalls zu T^4 proportionales Zusatzglied ergibt, würde aus (5) für dieses Zusatzglied eine lineare Temperaturproportionalität folgen. Vermutlich wird eine organische Einführung der Elementarlänge in die Quantenelektrodynamik auch das Stefan-Boltzmannsche Gesetz in ähnlicher Weise abändern.

Trotz der eben erörterten Unzulänglichkeit der unter II. besprochenen Korrektur neigen wir eher zu der Auffassung, daß die Berücksichtigung der Elementarlänge wesentlich in einer Abänderung des Phasenvolumens, Gl. (2), sich auswirken wird und nicht der statistischen Grundannahmen der Gl. (1), im Unterschied zu Jordans Hypothese[7], die gerade eine Korrektur von (1) bedeutet und (2) unangetastet läßt.

Auf die temperaturabhängige Polarisation des Vakuums hoffen wir in einer späteren Mitteilung ausführlicher eingehen zu können.

Wir danken den Hrn. Flügge, Heisenberg und Jordan für anregende Diskussionen über den hier behandelten Gegenstand.

[6] Heitler, Z. Physik **44**, 161 [1927]; Lenz, ebenda **56**, 778 [1929] und Ann. Physik **33**, 630 [1938]; F. London, Proc. Roy. Soc. London **880**, 576 [1936].

[7] P. Jordan, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. 1945, S. 77.